

# 分形图形生成的一种新方法

罗 忠 赵忠明 朱重光

(中国科学院遥感应用研究所 北京 100101)

**摘 要** 本文提出分形图形生成的一种新方法。采用分数维布朗运动来合成分形图形,分数维布朗运动用一种新的方法——递归空间滤波来获得。由分数维布朗运动的功率谱确定其二维成形滤波器的频率响应,然后采用以一维原形滤波器加旋转变换的方法来设计具有圆对称和指数衰减频率响应的成形滤波器。用成形滤波器对高斯分布的白色过程滤波,便可以得到具有期望分数维的布朗运动分形图形。

**关键词** 分形图形,分数维布朗运动,功率谱,成形滤波器,频率响应,数字滤波器设计

## 1 引 言

在分形科学发展的初期,就有研究者指出因为地球的表面形状非常复杂,用一般的代数曲面来描述往往是不合适的,而用某些定义于二维空间的分形随机过程则能够取得相当满意的效果<sup>[1-3]</sup>。这一事实说明实际的景观具有分形性质,它的发现导出了分形在地球科学中的应用。这种应用从分析和综合的观点可以分为两大类:第1类,用分形随机过程对景观进行以分析为目的的建模和描述<sup>[1,2]</sup>,如遥感图像处理中的某些分形方法;第2类,用合适的分形模型来模拟和生成具有真实感的景观,具有综合的性质。分形图形的生成是分形景观生成的核心,在分形图形基础上,利用图像复合,纹理映射等技术,在图形上加上植被等,进而生成逼真的模拟景观。

在综合应用中,发现分数维布朗运动(简称fBm)是一种合适的工具<sup>[1-5]</sup>。为了生成分形图形,就要能够产生具有任意分数维的fBm,分数维是刻画分形图形非常本质的参数,它在相差一个比例常数(比例常数k)的意义上唯一确定了分形图形的所有二阶统计特性,如自相关函数,自协方差函数,功率谱密度函数等。

生成fBm的一般方法有白噪声积分法、随机中点偏移法、独立跳跃法、Fourier谐波合成法、功率谱直接综合法、小波方法等<sup>[6-9]</sup>。在实际中常用的是基于快速Fourier变换(FFT)的功率谱直接综合法。该方法直观简单,但是也有几个较为显著的缺点:首先

为了获得高的频率分辨率,FFT的支持域(一般为 $Z^2$ 中矩形子集)不得不取得很大,导致很大的计算量;第二当FFT的支持域很大时,一般要分块处理,则会导致所谓的块效应;最后因为FFT包含(至少一块内的)全体数据的信息,所以无法生成具有空间变化统计特性的数据。

为了克服基于FFT方法的这些不足,我们在此提出一种通过设计fBm的成形滤波器来生成fBm的方法。

## 2 算法原理

定义在整数坐标网格 $Z^2$ 上的标量值离散域fBm是一个具有两个独立参数(一般对应空间坐标)的随机过程 $x(t)$ ,其二阶统计量满足

$$E|x(t_2) - x(t_1)|^2 = k \|t_2 - t_1\|_2^{2H} \quad (1)$$

其中参数 $t = [t_x, t_y]$ 是一个二维向量, $t_x \in Z, t_y \in Z, k > 0$ 为比例系数,参数 $H (0 \leq H \leq 1)$ 称为粗糙度参数。对应的功率谱性质是

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{K}{\|\omega\|_2^{2H+1}} \quad (2)$$

其中 $K > 0$ 为比例系数,频率 $\omega = [\omega_x, \omega_y]$ , $\omega_x \in [-\pi, \pi], \omega_y \in [-\pi, \pi]$ 是一个二维向量。fBm的分数维定义为 $D = 3 - H$ 。根据(1)或(2),并且利用功率谱和自相关函数之间的Fourier变换关系,我们可以推出所有的二阶统计量的计算式,这就是前文所说的唯一确定的意义。

生成fBm的涵义就是得到一个具有统计特性公

收稿日期:1997-06-09; 收到修改稿日期:1997-10-06

式(1)、(2)的某个随机过程的一次实现(或称采样)。如果用均值为零,方差为  $K$  的高斯分布的白色随机过程驱动频率响应为  $H(\omega)$  的稳定线性空域移不变滤波器<sup>[10]</sup>,输出过程在功率谱意义上等价于 fBm。根据广义平稳随机过程理论<sup>[11]</sup>有

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(\omega) &= KH(\omega)H(-\omega) \\ H(\omega) &= H(\omega_x, \omega_y) \\ &= H(Z_x, Z_y) \Big|_{Z_x = \exp(j\omega_x), Z_y = \exp(j\omega_y)} \end{aligned} \quad (3)$$

上述滤波器称作 fBm 的成形滤波器。其中  $H(z_x, z_y)$  是滤波器  $z$  变换域的传递函数。

我们提出的新算法本质上是基于成形滤波器的。即根据给定的 fBm 的分数维  $D$ , 确定对应的粗糙度参数  $H$ , 从而确定 fBm 功率谱的形式, 再利用公式(3)获得成形滤波器理想的频率响应, 并据此设计出能够逼近理想频率响应的数字滤波器。将得到的成形滤波器应用于高斯分布白色过程, 就可得到具有期望分数维  $D$  的 fBm。

### 3 成形滤波器频率响应的确定

确定的成形滤波器的频率响应依据是 fBm 的功率谱和式(3)。频率响应  $H(\omega)$  由幅度频率响应和相位频率响应按下述关系组成

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\varphi(\omega)) \quad (4)$$

并且

$|H(\omega)| = |H(-\omega)|$ ,  $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$  (5)  
所以不论  $\varphi(\omega)$  为何种形式, 只要  $K|H(\omega)|^2 = \Phi_{xx}(\omega)$ , 公式(3)就可满足。因此对成形滤波器, 只有幅度频率响应需要确定, 而不需考虑相位频率响应, 即只按照幅度频率响应去设计滤波器, 得到什么样的相位频率响应都可以。

根据公式(2), (3)有

$$|H(\omega)| = \|\omega\|_2^{-\left(H+\frac{1}{2}\right)} \quad (6)$$

这是成形滤波器的理想幅度频率响应, 但是这种理想特性在实际滤波器设计中是无法达到的<sup>[12,13]</sup>。所能做的是使设计的滤波器的特征尽可能逼近理想特性。

成形滤波器是一个二维空间滤波器, 二维空间滤波器的设计一般比一维滤波器设计复杂得多。很多情况下二维设计问题可以转化为一维设计问题, 使问题大大简化。此处的问题正属于可以转化的一类。因为理想频率响应是圆对称的, 我们可以采用多个不同的方向对称滤波器的级联(其传递函数等于各传递函数的连乘积)来逼近圆对称性。

$$H_a(z_x, z_y) = \prod_{i=1}^M H_i(\theta_i, z_x, z_y) \quad (7)$$

其中  $H_a(z_x, z_y)$  表示所设计的成形滤波器,  $H_i(\theta_i, z_x, z_y)$ ,  $1 \leq i \leq M$  是  $M$  个不同方向  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq M$  上的方向对称滤波器, 其频率响应满足

$$\begin{aligned} H_i(\theta_i, \omega_x, \omega_y) \\ = H_i\left(\left[\begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix}^T\right) \end{aligned} \quad (8)$$

即只依赖于频率向量  $[\omega_x, \omega_y]$  和方向  $[\cos \theta_i, \sin \theta_i]$  之间的夹角, 根据向量内积的性质

$$\begin{aligned} [\omega_x, \omega_y] \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix}^T \\ = \|\omega\|_2 \cos(\delta(\omega_x, \omega_y) - \theta_i) \end{aligned} \quad (9)$$

$\delta(\omega_x, \omega_y)$  是  $[\omega_x, \omega_y]$  的方向角。频率响应是关于方向  $\theta_i$  对称的。当这些方向对称滤波器的数目  $M$  任意

大, 而且  $M$  个对称方向均匀分布在  $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$  上时, 其级联能够以任意精度逼近一个圆对称滤波器。

因为理想频率响应  $H(\omega)$  是  $\|\omega\|_2$  的负指数函数, 所以各方向对称滤波器的频率响应也应该是  $|\|\omega\|_2 \cos(\delta(\omega_x, \omega_y) - \theta_i)|$  的负指数函数。令

$$H_i(\theta_i, \omega) = \alpha \left( \|\omega\|_2 \cos(\delta(\omega_x, \omega_y) - \theta_i) \right)^{-\beta} \quad (10)$$

现讨论方向  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , 比例系数  $\alpha$ , 指数  $\beta$  的选取方法。为使各方向均匀分布, 应有

$$\theta_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{(i-1)\pi}{M}, \quad 1 \leq i \leq M \quad (11)$$

选择  $\alpha$  和  $\beta$  的原则是, 所设计滤波器的频率响应和理想频率响应沿着  $M$  个对称滤波器的对称方向应相等。根据对称性可知, 所设计的频率响应沿  $M$  个对称方向是相同的, 所以只要考虑第一个方向  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  即可, 沿此方向有

$$\begin{aligned} H_a(\omega) &= \alpha^M \prod_{i=2}^M \left( \|\omega\|_2 \cos \theta_i \right)^{-\beta} \|\omega\|_2^{-\beta} \\ &= \alpha^M \left( \prod_{i=2}^M |\cos \theta_i| \right)^{-\beta} \|\omega\|_2^{-M\beta} \end{aligned} \quad (12)$$

比较公式(6), (12)可得

$$\alpha^M = \left( \prod_{i=2}^M |\cos \theta_i| \right)^{-\beta} \text{ 和 } M\beta = H + \frac{1}{2} \quad (13)$$

即

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \prod_{i=2}^M |\cos \theta_i| \right)^{-\frac{\beta}{M}} \text{ 和} \\ \beta &= \left( H + \frac{1}{2} \right) / M \end{aligned} \quad (14)$$

### 4 一维原形滤波器的设计

以上我们得到了方向对称滤波器的频率响应

$H_i(\theta_i, \omega_x, \omega_y), 1 \leq i \leq M$ , 方向对称滤波器虽然在形式上是二维空间滤波器, 但是可以通过一维原形滤波器经变换得到。

为讨论方便, 先转入  $s$  域 (Laplace 变换域)。设在  $s$  域, 原形滤波器的传递函数为  $G_p(s)$ , 引入关于方向  $\theta$  的旋转变换  $s = s_x \cos \theta + s_y \sin \theta$ , 则可以得到对称方向为  $\theta$  的对称滤波器。

$$G_p(s_x, s_y) = G_p(s_x \cos \theta + s_y \sin \theta) \quad (15)$$

利用双线性变换  $s_x = \frac{1 - z_x^{-1}}{1 + z_x^{-1}}, s_y = \frac{1 - z_y^{-1}}{1 + z_y^{-1}}$  可以得到  $z$  域的对称滤波器

$$H_p(z_x, z_y) = G_p\left(\frac{1 - z_x^{-1}}{1 + z_x^{-1}} \cos \theta + \frac{1 - z_y^{-1}}{1 + z_y^{-1}} \sin \theta\right) \quad (16)$$

可见问题最终归结为设计  $s$  域原形滤波器  $G_p(s)$ 。那么究竟应该怎样来设计  $G_p(s)$  呢? 根据已经得到的二维方向对称滤波器的理想频率响应特性公式 (10), 可知  $G_p(s)$  应该满足条件

$$G_p\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\Big|_{z = \exp(j\omega)} = \alpha |\omega|^{-\beta} \quad (17)$$

滤波器设计所能给出的滤波器形式一般有非递归 (又称有限脉冲响应即 FIR) 和递归 (又称无限脉冲响应即 IIR) 两种。递归形式的优点是用较少的系数获得很大的支持域, 实现无需卷积运算, 从而计算量少等。在此我们选择递归形式。  $P$  阶递归滤波器的形式是

$$G_p(s) = \frac{\sum_{i=0}^P a_i s^i}{\sum_{i=0}^P b_i s^i} \quad (18)$$

因此最终的问题变成给定理想频率响应的一维递归线性时不变滤波器 (即 IIR 滤波器) 的设计问题。这是滤波器设计中的典型问题, 处理方法是通过对适当目标函数进行优化, 求式 (18) 中各系数  $a_i, b_i, 1 \leq i \leq P$ 。很多数字信号处理软件 (如 matlab 等), 都能完成该工作。实验证明, 阶数  $P$  最多取 3 就可以了。表

表 1 原形滤波器系数的部分计算结果

Table 1 Some calculated parameters of the prototype filter

$\beta$	$a_0$	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$
0.31	-0.0033066	0.0036609	-0.054095	0.15935	-0.050545	0.77389	0.18915	1.0
0.32	-0.0031759	0.0035231	-0.051461	0.15599	-0.049768	0.76587	0.17921	1.0
0.33	-0.0030525	0.0033919	-0.049001	0.15285	-0.048863	0.75830	0.16979	1.0
0.34	-0.0029303	0.0032622	-0.04660	0.14955	-0.048061	0.75024	0.16085	1.0
0.35	-0.0028183	0.0031417	-0.044377	0.14654	-0.047151	0.74281	0.15238	1.0

1 给出了部分设计结果 (计算该表时, 假设比例系数  $\alpha = 1$ 。若应用中  $\alpha \neq 1$ , 将表中的系数均乘以  $\alpha$ )。

得到  $G_p(s)$  之后, 利用旋转变换和双线性变换按式 (16) 计算对应的  $z$  域滤波器  $H_p(z_x, z_y)$ 。  $H_p(z_x, z_y)$  也必定具有阶数不超过  $P$  的递归形式

$$H_p(z_x, z_y) = \frac{\sum_{i,j=0}^P c_{ij} z_x^{-i} z_y^{-j}}{\sum_{i,j=0}^P d_{ij} z_x^{-i} z_y^{-j}} \quad (19)$$

现给出滤波器系数  $c_{ij}, d_{ij}, 0 \leq i, j \leq 3$  的计算方式如下。

$$c_{33} = -a_3 a^3 + a_2 a^2 - a_1 a + a_0 \quad (20-1)$$

$$c_{23} = -3a_3 a^2 b + a_2 (a^2 + 2ab) - a_1 (2a + b) + 3a_0 \quad (20-2)$$

$$c_{13} = -3a_3 a b^2 + a_2 (2ab + b^2) - a_1 (a + 2b) + 3a_0 \quad (20-3)$$

$$c_{03} = -3a_3 b^3 + a_2 b^2 - a_1 b + a_0 \quad (20-4)$$

$$c_{32} = -3a_3 a^2 b + a_2 (a^2 - 2ab) + a_1 (b - 2a) + 3a_0 \quad (20-5)$$

$$c_{22} = -3a_3 (a^3 + 2ab^2) - a_2 a^2 - 3a_1 a + 9a_0 \quad (20-6)$$

$$c_{12} = 3a_3 (2a^2 b + b^3) - a_2 (2a^2 + 2b^2) - 3a_1 b + 9a_0 \quad (20-7)$$

$$c_{02} = 3a_3 a b^2 + a_2 (b^2 - 2ab) + a_1 (a - 2b) + 3a_0 \quad (20-8)$$

$$c_{31} = -3a_3 a b^2 + a_2 (b^2 - 2ab) + a_1 (2 - a) + 3a_0 \quad (20-9)$$

$$c_{21} = -3a_3 (2a^2 b + b^3) - a_2 (2a^2 + b^2 + 2ab) + 3a_1 b + 9a_0 \quad (20-10)$$

$$c_{11} = -3a_3 a b^2 - a_2 (a^2 + 2b^2) + 3a_1 a + 9a_0 \quad (20-11)$$

$$c_{01} = -3a_3 a^2 b + a_2 (a^2 - 2ab) + a_1 (2b - b) + 3a_0 \quad (20-12)$$

$$c_{30} = a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \quad (20-13)$$

$$c_{20} = 3a_3 a b^2 + a_2 (b^2 + 2ab) + a_1 (2b + a) + 3a_0 \quad (20-14)$$

$$c_{10} = 3a_3 a^2 b + a_2 (a^2 + 2ab) + a_1 (b + 2a) + 3a_0 \quad (20-15)$$

$$c_{00} = a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 \quad (20-16)$$

其中  $a = \cos \theta + \sin \theta, b = \sin \theta - \cos \theta$ 。只要把对应

的  $c_{ij}$  的计算式中的系数  $a_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$  换成对应的  $b_j$ , 即可得到  $d_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq 3$  的计算式。

至此已经给出了设计具有任意对称方向的方向对称二维滤波器的方法。故可以对  $M$  个方向  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq M$  分别构造方向对称滤波器, 最后按式(7)级联构成成形滤波器。但是当  $M$  较大时, 要获得成形滤波器的所有系数的计算公式较为困难。所以成形滤波器还是按级联方式实现, 即用  $M$  个方向对称滤波器依次进行  $M$  次滤波。

现在将新算法的内容归纳如下:

算法的输入参数是

- (1) 分数维  $D$ , 高斯白色过程的方差  $K$ ;
- (2) 分形图像的长度  $L$  和宽度  $W$ ;
- (3) 方向数  $M$ ;
- (4) 原形滤波器阶数  $P$ 。

算法的执行步骤是

- (1) 根据  $D$  和  $M$  确定  $H$  和  $\alpha, \beta, \theta_i, 1 \leq i \leq M$ ;
- (2) 设计阶数为  $P$  的  $s$  域递归原形滤波器;
- (3) 利用旋转变换和双线性变换得到  $M$  个方向对称滤波器;
- (4) 生成元素均值为零, 方差为  $K$  的随机数的  $W \times L$  矩阵;
- (5) 用  $M$  个方向对称滤波器依次对步骤(4)生成的随机矩阵滤波, 结果即为  $fBm$ 。

### 5 试验结果

在过去的研究中已经发现粗糙度参数  $H$  对于控制生成分形图形的视觉效果非常重要(因为  $D = 3 - H$ , 所以说明  $H$  的控制作用就等于说明了  $D$  的作

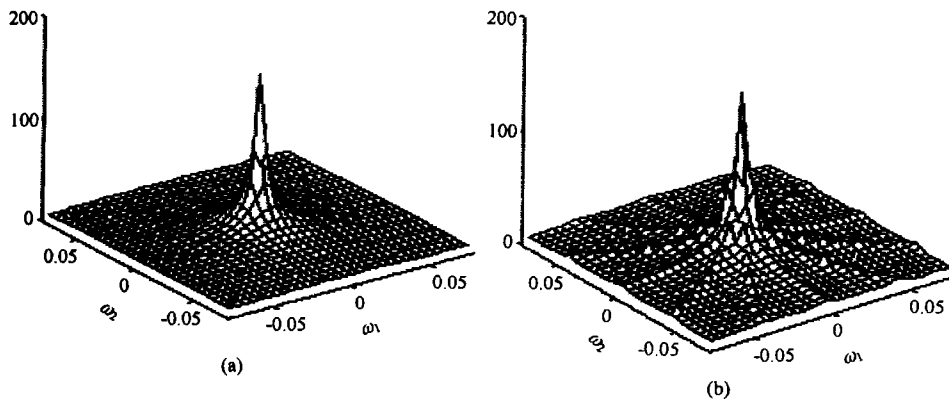


图1 理想成形滤波器(a)和所设计的成形滤波器(b)的频率响应,  $H = 0.8, D = 2.2$

Fig.1 Frequency responses of ideal shaping filter (a) and designed shaping filter (b)  $H = 0.8, D = 2.2$

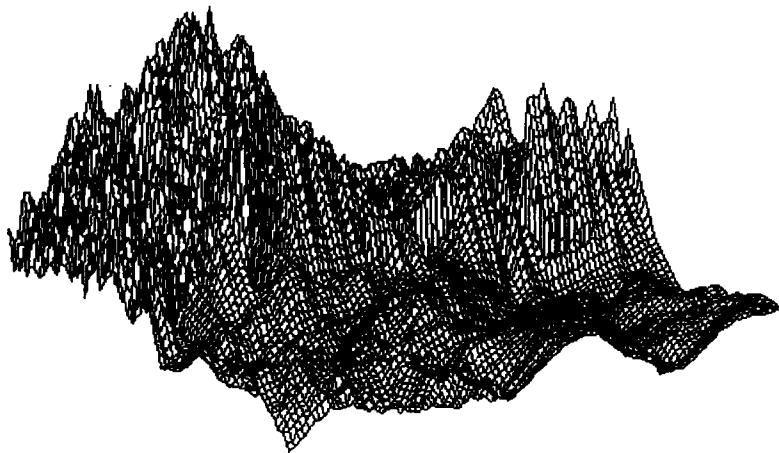


图2 本文方法生成的分形图形

Fig.2 Fractal image generated using the method proposed in this paper

用)。例如,  $H = 0.8$  对应于典型的山地地形。但是在真实的自然图形中,在一定区域内,粗糙度是变化的。为了使生成的分形图形具有真实感,算法必须能够在生成过程中使  $H$  连续变化。遗憾的是现有的很多算法做不到这一点,或是即便  $H$  能变化,但是图形不连续(产生峭壁)。例如基于 FFT 的功率谱直接综合法的块效应就是这样。而新方法可以很容易地解决这一问题。只要在滤波过程中切换对应不同  $H$

的滤波器即可,而且得到的图形是连续的。

图 1(a) (b) 分别是理想和所设计的成形滤波器的幅度频率响应,取  $M = 6$ 。图 2 是一幅其左前,右前,左后,右后 4 个象限分别具有不同  $H$  的分形图形(左前方、右前方、左后方、右后方的  $H, D$  分别是  $H = 0.95, D = 2.05; H = 0.9, D = 2.1; H = 0.8, D = 2.20; H = 0.75, D = 2.25$ )。图 3 是对应的等高线图。

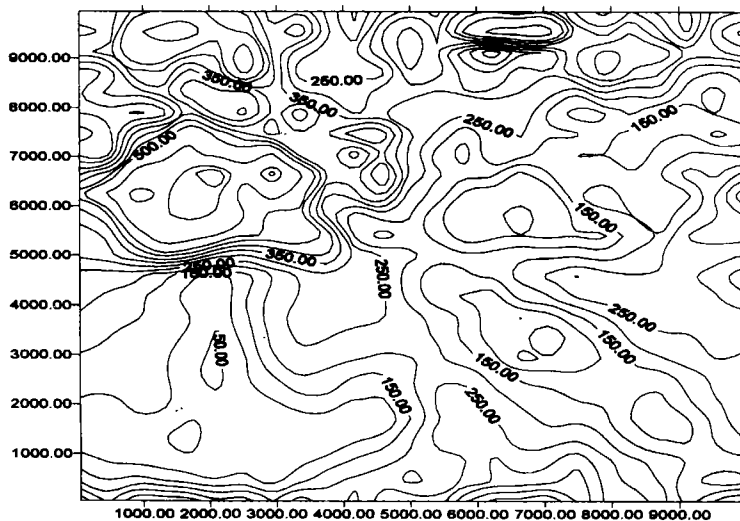


图 3 图 2 所示之分形图形的等高线图(单位 m)

Fig.3 The contour plot of the fractal image of fig.2

## 6 结 论

本文提出了一种生成分形图形的新方法。对这种方法有以下结论:

(1) 理论基础是广义平稳随机过程的功率谱和成形滤波器的关系。

(2) 成形滤波器的设计采用了二维圆对称滤波器设计的新技术——基于旋转原形滤波器的设计方法。

(3) 与基于 FFT 的功率谱直接综合法相比有

(a) 没有块效应;

(b) 能生成分数维空间变化的 fBm

(c) 计算效率方面,本文算法在输入参数给定条件下,滤波器的设计过程只需进行一次,以后每次重复生成 fBm 只需执行步骤(4), (5)。而基于 FFT 的功率谱直接综合法则每次要进行高斯白色过程的生成(相当于步骤(4))和 FFT 运算。那么两者之间所要比较的仅仅是步骤(5)和 FFT 的计算量。FFT 的计算量为  $O(WL \log_2(WL))$ , 步骤(5)的计算量为  $O(2MWL(2(P+1)^2 - 1))$ 。

## 参 考 文 献

- 1 A. P. Pentland. Fractal-Based Description of Natural Sciences. *IEEE trans.on PAMI*, 1984, 6 (6):661—674.
- 2 B. B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco. CA: Freeman, 1982.
- 3 K. M. Mark, P. B. Aronson. Scale-dependent Fractal Dimensions of Topographic Surface. *Mathematical Geology*, 1984, 16 (7):671—683.
- 4 L. E. Gilbert. Are Topographic Data Sets Fractal? *Pure. Applied Geophysics*, 1989, 131 (1): 241—254.
- 5 王桥, 吴纪桃. 基于地学图形的地表分维计算方法研究. *中国图象图形学报*, 1997, 2 (4): 220—224.
- 6 R. J. Voss. Fractals in Nature: from Characterization to Simulation. *The Science of Fractal Images*. M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot *et al*, Eds., Springer-Verlag, New York, 1988, 21—70.
- 7 D. Saupe. Algorithms for Random Fractals. *The Science of Fractal Images*, M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot *et al*, Eds., Springer-Verlag, New York, 1988, 71—136.
- 8 A. H. Tewfik, M. Kim. Correlation Structure of the Discrete Wavelet Coefficients of Fractional Brownian Motion. *IEEE trans. on Infomation Theory*, 1992, 38, (2):904—909.

- 9 P. Flandrin. Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion. *IEEE trans. on Information Theory*, 1992, 38 (2):910—917.
- 10 孙仲康,沈振康. 数字图象处理及其应用. 北京:国防工业出版社,1985.
- 11 汪荣鑫. 随机过程. 西安:西安交通大学出版社,1986.
- 12 A. V. Oppenheim, R. W. Shafer. Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1975.
- 13 邹理和. 数字信号处理. 北京:国防工业出版社,1983.

### 作者简介

罗忠,1969年生,1996年毕业于西安交通大学,获自动控制理论及应用专业博士学位。现为中国科学院遥感应用研究所博士后。研究领域为控制理论、信号和图像处理、神经网络、计算机图形学等。已发表论文20多篇。

## A New Method for Generation of Fractal Images

Luo Zhong Zhao Zhongming Zhu Chongguang

(Institute of Remote Sensing Applications, CAS, Beijing, 100101)

**Abstract** A new method for generation of fractal Images is presented in this paper. To synthesize fractal Images, fractional Brownian motions are used which are obtained by a new means—recursive space filtering. The power spectrum of fractional Brownian motion can be used to determine the frequency—response of the two—dimensional shaping filter of fractional Brownian motion, then the shaping filter whose frequency response is circularly symmetric and exponentially decaying can be designed using a method based on one—dimensional prototype filter and rotation transforms. The fractional Brownian motion based fractal Image with desired fractional dimension can be generated by applying its shaping filter to a Gaussian distributed white process.

**Key words** Fractal Image, Fractional Brownian motion, Power spectrum, Shaping filter, frequency—response, Digital filter design